Chapitre 1

Nombres complexes, Applications $\mathbb{C}$-linéaires

On peut définir sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, des couples ordonnés (x, y) de réels , une multiplication par :

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Ainsi, muni de cette multiplication et de l'addition des vecteurs $\mathbb{R}^2$ est un corps commutatif, noté $\mathbb{C}$, appelé le corps des nombres complexes.

En posant $1 := (1, 0)$ et $i := (0, 1)$, on aura $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$, et $\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Pour ce produit on a : $1^2 = 1.1 = 1$ et $i^2 = i.i = -1$.
2. Pour x et y réels et $z = x + iy$ on définit $\operatorname{Re} z = x$ sa partie réelle et $\operatorname{Im} z = y$ sa partie imaginaire,
3. le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est le conjugué de z
4. $|z| = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ est le module de z
5. on a
$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z\bar{z}$$
6. Pour $z \neq 0$, on a $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.
7. pour $z, w \in \mathbb{C}$ on a
$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$
8. $\mathbb{R}$ est identifié au sous-ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$.

1.1 Applications $\mathbb{C}$-linéaires

Soit $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une application $\mathbb{C}$-linéaire, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $L(z) = z.L(1) = wz$, où $w = L(1)$. Si $w \neq 0$, on écrivant $w = \rho e^{i\theta}$, on obtient $L(z) = L(x+iy) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)(x+iy) = \rho(x\cos\theta - y\sin\theta) + i\rho(x\sin\theta + y\cos\theta)$

La matrice représentative de L dans la base canonique $\{1, i\}$ est alors :

$$\begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

c'est la matrice d'une similitude vectorielle directe, le produit d'une homothétie de rapport ρ et d'angle θ. Le déterminant est égal à $\rho^2 > 0$, une telle transformation conserve l'orientation et les angles.

Question : Sous-quelles condition une application $\mathbb{R}$-linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{C}$-linéaire ? La réponse est donnée par :

1.1.1 Proposition

Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. $L(i) = iL(1)$.
3. Il existe un nombre complexe $w \in \mathbb{C}$, tel que $L(z) = wz$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ i.e. L est **une similitude**.
4. La matrice représentative de L dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration: les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ sont immédiates,$3 \Rightarrow 4$ résulte de la discution précédente . On va montrer que $4 \Rightarrow 1$. Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, qui est représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par une matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors, $L(z) = L(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y) = (\lambda x - \mu y) + i(\mu x + \lambda y) = wz$ où $w = \lambda + i\mu$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $L(z) = wz$, d'où L est $\mathbb{C}$-linéaire. ∎

1.2 Topologie sur $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est muni de la topologie associée à la norme euclidienne $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: la distance de deux nombres complexes z et w est $|z - w|$. Une suite de nombres complexes z_n converge vers z si et seulement si $|z_n - z| \to 0$, si et seulement si les suites réelles $x_n = \operatorname{Re} z_n$ et $y_n = \operatorname{Im} z_n$ des parties réelles et imaginaires convergent vers $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ respectivement.

Une partie $\Omega \subset \mathbb{C}$ est ouverte si et seulement si, pour tout $z \in \Omega$, il existe un réel $r > 0$ tel que le disque $D(z;r) = \{w \in \Omega | |z - w| < r\}$ soit entièrement contenu dans Ω.

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$. Une fonction f de Ω dans $\mathbb{C}$ s'identifie à un couple de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, en décomposant $f(z)$ en partie réelle et partie imaginaire : $f(z) = P(z) + iQ(z)$. En identifiant Ω à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, f peut être considérée comme un couple de fonctions de deux variables réelles (x, y) à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{1.1}$$

Réciproquement, à tout couple (P, Q) de fonctions de deux variables réelles $(x, y) \in \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la formule ci-dessus fait correspondre une fonction de Ω, considéré comme sous-ensemble de $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{C}$.

Exemples d'applications du plan complexe

Exemple 1 Soit $a = \alpha + i\beta$ (ou bien $a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$) un nombre complexe non nul. L'application $f_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f_a(z) = a.z$, s'écrit $f_a(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ avec $P(x, y) = \alpha x - \beta y$ et $Q(x, y) = \beta x + \alpha y$. On peut aussi voir f_a comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(X, Y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$ ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est une similitude d'angle $\theta = argument(a)$ et de rapport $\rho = |a|$.

Exemple 2 Soit $f : \mathbb{C} - \{1\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $f(iy) = \dfrac{iy+1}{iy-1} = \dfrac{iy+1}{iy-1} \cdot \dfrac{-iy-1}{-iy-1} = \dfrac{y^2-1}{y^2+1} - i\dfrac{2y}{y^2+1}$

Si on pose $u = \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$ et $v = -\dfrac{2y}{y^2+1}$ on obtient $u^2 + v^2 = 1$ c-à-d que (u, v) est un point du cercle $C = C((0,0), 1)$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1. et réciproquement pour tout point $(u, v) \in C((0,0), 1)$ il existe $y \in \mathbb{R}$ telle que $u = \dfrac{y^2-1}{y^2+1}$ et $v = -\dfrac{2y}{y^2+1}$. Donc l'image par f de l'axe imaginaire $i\mathbb{R} = \{z = iy; y \in \mathbb{R}\}$ est le cercle unité.

1.2.1 Exercice Montrer que l'image par l'application $f(z) = z^2$ de la droite verticale $D_a = \{z = a + iy \in \mathbb{C}; y \in \mathbb{R}\}$, $a \in \mathbb{R}^*$ est la parabole d'équation $X = a^2 - \dfrac{Y^2}{4a^2}$.
Faire de même pour les droites horizontales $D_b = \{z = x + ib \in \mathbb{C}; x \in \mathbb{R}\}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Continuité

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ et soit f une application de Ω dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est continue en a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists r > 0 : \qquad \forall z \in \Omega \cap D(a; r), \qquad |f(z) - f(a)| < \epsilon$$

f est continue dans Ω lorsqu'elle est continue en chaque point a de Ω.

Sommes, produits et quotients (lorsqu'ils sont définis) de fonctions continues sont continus.

les fonctions usuelles, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto z^n$, $z \mapsto \bar{z}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et celles qu'on peut former par sommes, produits, quotients à partir de celles-ci, sont continues. En particulier, les polynômes, les fractions rationnelles sont continus.

1.3 Annexe

1.3.1 Projection stéréographique et sphère de Riemann

On définit, une application de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{S}^2 = \{Z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, privée d'un point, par exemple le pôle nord $N = (0,0,1)$, sur le plan complexe $\mathbb{C}$, identifié à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, de la façon suivante : à tout point Z de la sphère, différent de N on associe l'unique point de l'intersection de la droite NZ avec $\mathbb{C}$. Cette application est appelée *La projection Stéréographique* notée π_N et son expression est donnée par

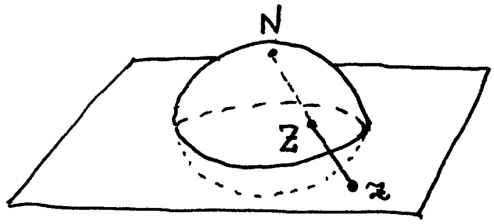


Fig.1

$$\begin{array}{rccc} \pi_N : & \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & Z = (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & z = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \end{array}$$

et son application inverse est définie par $\pi_N^{-1}(z) = \left(\dfrac{2 \operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}, \dfrac{2 \operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}, \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$.

En effet, si $Z = (x_1, x_2, x_3) \neq N$, alors le point $z = (a, b, 0)$ d'intersection de la droite NZ avec le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est défini par l'existence d'un réel λ tel que $NZ = \lambda Nz$ i.e. $(x_1, x_2, x_3 - 1) = \lambda(a, b, -1)$. Ceci nous donne, $\lambda = 1 - x_3$, $a = \frac{x_1}{1 - x_3}$ et $b = \frac{x_2}{1 - x_3}$.

Inversement , pour $z = a + ib$, la relation $(x_1, x_2, x_3 - 1) = \lambda(a, b, -1)$, nous donne $x_3 = 1 - \lambda$, $x_2 = \lambda b$ et $x_1 = \lambda a$, comme $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, on aura en plus $1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \lambda^2(a^2 + b^2) + (1 - \lambda)^2$, d'où on obtient que $\lambda = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}$ et donc $x_1 = \frac{2a}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}$ et $x_2 = \frac{2b}{|z|^2 + 1} = \frac{2 \operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}$ et finalement $x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$.$\blacksquare$

1.3.1 REMARQUE
Les images des méridiens par la projection stéréographique sont des demi-droites issues de l'origine et celles des parallèles des cercles centrés en l'origine.

Pour voir ceci, on passe en coordonnées sphériques. Un point $Z \in \mathbb{S}^2$ est représenté par $(e^{i\theta}\cos\phi, \sin\phi)$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

L'équation d'un méridien est alors de la forme $\theta = \theta_0$, et son image par π_N est l'ensemble $\left\{z = e^{i\theta_0}\left(\dfrac{\cos\phi}{1-\sin\phi}\right) \mid \phi \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]\right\}$, c'est l'équation de la demi-droite issue de l'origine et de direction $e^{i\theta_0}$.

De même, l'équation d'un parallèle est de la forme $\phi = \phi_0$, ($\phi_0 \neq \pm\frac{\pi}{2}$) et son image par π_N est l'ensemble $\left\{z = e^{i\theta}\left(\dfrac{\cos\phi_0}{1-\sin\phi_0}\right) \mid \theta \in [0, 2\pi]\right\}$, c'est l'équation du cercle centré en l'origine et de rayon $\left|\dfrac{\cos\phi_0}{1-\sin\phi_0}\right|$.

On voit, des expressions analytiques de π_N et π_N^{-1}, qu'elles sont continues (et même C^∞), donc le plan complexe est homéomorphe à la sphère privée d'un point, ainsi on pourrait rendre le plan complexe compact en lui adjoignant un point. En outre, on a $\lim_{|z|\to+\infty} \pi_N^{-1}(z) = (0, 0, 1)$, le pôle nord représente donc le point à l'infini de $\mathbb{C}$.

On note ∞ le point qu'on adjoint à $\mathbb{C}$ et $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On étend la projection stéréographique en une bijection de $\mathbb{S}^2$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ en envoyant N sur ∞. On munit $\widehat{\mathbb{C}}$ de la topologie la moins fine qui rende π_N et π_N^{-1} continues. On obtient

1.3.2 THÉORÈME
$\widehat{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, appelée sphère de Riemann.

1.3.3 REMARQUE
Pour $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, si $z_0 \neq \infty$ une base de voisinages ouverts est donnée par les disques $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z = z_0| < r\}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, mais si $z_0 = \infty$ une base de voisinages ouverts est donnée par les ensembles de la forme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3.4 Exercice Montrer que la topologie sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est induite par la métrique définie par : pour z_1, z_2 et $z \in \mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}, \qquad d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Chapitre 2

Propriétés élémentaires et exemples de fonctions holomorphes

2.0.5 DÉFINITION
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction.

1. On dit que f est $\mathbb{C}$-**dérivable** en $a \in \Omega$ si la limite du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe lorsque $h \neq 0$ tend vers 0. Dans ce cas on note par $f'(a)$ la limite.
2. On dit que f est **holomorphe sur** Ω si elle est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point de Ω.
   On notera par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur l'ouvert Ω.

2.0.6 EXEMPLE. Toute fonction polynomiale $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z \in \mathbb{C}$ et $P'(z) = n a_n z^{n-1} + \ldots + 2a_2 z + a_1$, comme $\mathbb{C}$ est un ouvert, elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2.0.7 PROPOSITION
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit le nombre $R \in \overline{\mathbb{R}}$ par

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}.$$

1. Alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$ la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ converge absolument sur le disque $|z-a| < R$ et converge normalement sur le disque $|z-a| \leq r$ pour $r < R$.
2. La suite $a_n(z-a)^n$ n'est pas bornée si $|z-a| > R$, d'où la série diverge .

Ainsi, les points de convergence z de la série sont tels que $|z-a| < R$ et peut être sur le cercle $|z-a| = R$. Le nombre R est appelé le rayon de convergence de la série.

Démonstration: Soit $r < R$ et $\tilde{r} \in]r, R[$. Alors, $1/\tilde{r} > \limsup |a_n|^{1/n}$, d'où $|a_n|^{1/n} < 1/\tilde{r}$ pour n assez grand. Pour un tel n, $|a_n| < 1/\tilde{r}^n$ et donc

$$\sup_{|z-a|<r} |a_n(z-a)^n| < (r/\tilde{r})^n.$$

Comme $\sum (r/\tilde{r})^n < \infty$ on aura la convergence normale sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$.
Si $|z-a| = r > R$, on prend $\tilde{r} \in]R, r[$. Alors il existe une infinité de n tel que $|a_n|^{1/n} \geq 1/\tilde{r}$. D'où $|a_n(z-a)^n| \geq (r/\tilde{r})^n$, qui tend vers ∞. ∎

Si $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$, alors, sur le disque de convergence on a, $f'(z) = \sum n a_n (z-a)^{n-1}$, et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(k)}(z) = \sum n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}$. Ainsi, $a_0 = f(a)$, $a_1 = f'(a)$, $a_2 = \frac{f''(a)}{2}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$. Ceci montre que sur le disque de convergence on a, f est égale à sa série de Taylor :

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n.$$

2.0.9 DÉFINITION
Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une **fonction analytique sur** Ω si pour tout $a \in \Omega$ il existe $r_a > 0$ et une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq r_a$ tels que : $D(a, r_a) \subset \Omega$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ en tout point $z \in D(a, r_a)$.

On a donc

2.0.10 THÉORÈME
Toute fonction analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. De plus ses dérivées successives sont elles aussi des fonctions analytiques sur cet ouvert.

2.0.11 REMARQUE
On verra plus tard qu'une fonction holomorphe est automatique analytique. Ainsi, une fonction holomorphe ne sera pas seulement dérivable, mais de classe C^∞. Ce point est radicalement différent du cas réel.

2.0.12 EXEMPLE. La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Sa somme est, par définition, la fonction exponentielle $\exp z$. Donc, la fonction $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe.

2.0.13 EXEMPLE. La conjugaison complexe, i.e. la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en 0. En effet, $\dfrac{\bar{z}}{z}$ n'a pas de limite lorsque h tend vers 0, puisque la limite vaut 1 si $h \in \mathbb{R}$ et -1 si $h \in i\mathbb{R}$.

Les règles algébriques de dérivation des fonctions $\mathbb{C}$-dérivables sont identiques à celles des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec les mêmes démonstrations on obtient.

2.0.14 PROPOSITION

1. Une fonction $\mathbb{C}$-différentiable en un point y est continue.
2. Si f et g sont $\mathbb{C}$-différentiables en un point il en est de même de fg et de $\lambda f + \mu g$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$.
4. Si f est $\mathbb{C}$-différentiable en a et g en $f(a)$ alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-différentiable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

2.1 Equations de Cauchy–Riemann

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert. Par abus de notation on écrit $f(x, y)$ à la place de $f(x + iy)$. Si $f'(z)$ existe en $z = x + iy \in \Omega$, alors

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \to 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \to 0}} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z),$$

et

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \to 0}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \lim_{\substack{h \in \mathbb{R} \\ h \to 0}} \frac{1}{i} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z).$$

Ainsi la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f en z entraîne non seulement que les dérivées partielles de f en z existent, mais aussi qu'elles vérifient l'équation suivante dite de Cauchy–Riemann :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Si $f = P + iQ$, avec $P = \operatorname{Re} f$ et $Q = \operatorname{Im} f$ alors cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Une autre façon, très pratique de présenter cela est

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Cette présentation est motivée par les relations

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \; y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \; \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \; \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0, \; \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0, \; \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1.$$

Les équations de Cauchy–Riemann sont alors équivalentes à :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

L'opérateur différentiel, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ est appelé opérateur de Cauchy-Riemann.
Dans ce cas, $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)$
Réciproquement, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction différentiable en tant que fonction de x et y, et $a \in \Omega$, on en déduit des relations entre x, y, z et $\bar{z}$, et que pour h au voisinage de 0 on a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\bar{h} + o(|h|).$$

D'où, si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$, f est $\mathbb{C}$-différentiable en a et la différentielle de f est une similitude $df(a)h = \frac{\partial f}{\partial z}(a).h$.

En résumé on a

2.1.1 Théorème

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est holomorphe sur Ω.
2. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω et vérifie les équations de Cauchy–Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ en tout point.
3. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω et sa différentielle en tout point est une similitude.

2.1.2 Remarque

Le théorème peut être affaibli, en ne supposant que la continuité de f sur Ω, l'existence des dérivées partielles et la conditions de Cauchy–Riemann (sans supposer que f est différentiable comme fonction des variables x et y), alors f est holomorphe sur Ω. C'est le théorème de Looman–Menchoff (voir le livre de Narasimhan, *Complex Analysis in One Variable* (edition Birkhauser))

2.1.3 Remarque

On notera que

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta.$$

où Δ est l'opérateur laplacien $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Par suite, si $f \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, $f = P + iQ$ alors

$$\Delta f = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = 0$$

d'où $\Delta P = \Delta Q = 0$ i.e. P et Q sont des fonctions harmoniques. Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe, sont des fonctions harmoniques. On a supposé que f est holomorphe et de classe C^2, on verra par la suite que cette dernière hypothèse est superflue, puisqu'une fonction holomorphe est automatiquement de classe C^∞.

2.2 Annexe

2.2.1 Exponentielle, argument et logarithme

2.2.1 DÉFINITION

La fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ est la fonction $z \mapsto exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

on utilisera aussi la notation e^z pour désigner $exp(z)$.

Propriétés

(1) $exp(z+z') = exp(z)exp(z') \qquad \forall z, z' \in \mathbb{C}$

(2) $exp(z) \neq 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

(3) $(exp(z))' = exp(z)$, ainsi $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$

(4) $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$ et $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$

Démonstration: 1. On rappel que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes complexes absolument convergentes alors la série de terme général $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ est absolument convergente et a pour somme $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.

Posons $a_n = \frac{z^n}{n!}$ et $b_n = \frac{z'^n}{n!}$, il vient :

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}\frac{z'^q}{q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} z^p z'^q = \frac{1}{n!}(z+z')^n.$$

d'où $exp(z)exp(z') = (\sum \frac{z^n}{n!})(\sum \frac{z'^n}{n!}) = \sum c_n = \sum \frac{(z+z')^n}{n!} = exp(z+z')$

2. $exp(z)exp(-z) = exp(z-z) = e^0 = 1$, d'où $exp(z) \neq 0$. Ainsi exp applique $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$ et $\frac{1}{exp(z)} = exp(-z)$.

3. c'est un résultat général sur la somme d'une série entière à l'intérieur de son disque de convergence et $(exp(z))' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$.

4. En utilisant la continuité de la conjugaison complexe, $z \mapsto \bar{z}$, on obtient $\overline{(e^z)} = \overline{(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!})} = \lim_{n\to+\infty} \overline{(\sum_{p\leq n} \frac{z^p}{p!})} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p\leq n} \frac{\bar{z}^p}{p!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}}$.

Alors, $|e^z|^2 = e^z.\overline{(e^z)} = e^z.e^{\bar{z}} = e^{z+\bar{z}} = e^{2\,\mathrm{Re}\, z} = (e^{\mathrm{Re}\, z})^2$ et par suite $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.

2.2.3 REMARQUE

Une conséquence de (1) et (2) l'application $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe additif $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{C}^*, .)$

On a pour $y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i\sin(y)$,
par conséquent, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on aura $e^z = e^x.e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)$.
On va alors étudier l'exponentielle complexe en utilisant pour cela les propriétés des fonctions trigonométriques réelles cos et sin .

2.2.4 Proposition
L'application $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective et $2i\pi$-périodique.

Démonstration: 1. exp est surjective.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\frac{z}{|z|} \in C = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$, comme l'application $t \in \mathbb{R}$ associe $e^{it} \in C$ est surjective il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{it}$. Ainsi $z = |z|e^{it} = e^{\ln|z|}e^{it} = e^{\ln|z|+it}$, est l'image d'un nombre complexe par exp.
2. exp est $2i\pi$-périodique. En effet, $exp(z + 2i\pi) = e^z.e^{2i\pi} = e^z$. ■

2.2.6 Exercice En utilisant la formule $e^z = e^x.e^{iy}$ montrer que :
1. l'image par exp de la droite verticale $\{x = a\}$ est le cercle $C(0, e^a)$ de centre 0 et de rayon e^a
2. l'image par exp de la droite horizontale $\{y = b\}$ est la demi-droite $\{te^{ib}, t > 0\}$.
3. $exp : B_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, \theta_0 - \pi < \mathrm{Im}(z) < \theta_0 + \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{te^{i(\theta_0-\pi)}, t > 0\}$ est un difféomorphisme, sa fonction réciproque est une détermination du logarithme dans le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{te^{i(\theta_0-\pi)}, t > 0\}$.

2.2.2 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Maintenant on veut étendre la définition des fonctions cosinus et sinus au plan complexe. L'extension de l'exponentielle suggère une façon d'étendre ces fonctions.

2.2.7 Définition
Pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{2.1}$$

La proposition suivante donne quelques propriétés de ces fonctions

2.2.8 Proposition
i) sin et cos sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$.
ii) $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$
iii) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
iv) $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$ et $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

2.2.9 Exercice Démontrer cette proposition.

2.2.10 PROPOSITION
Les zéros de sin dans $\mathbb{C}$ sont les nombres réels $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Les zéros de cos dans $\mathbb{C}$ sont les nombres réels $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration: En se rappelant que $e^{i\pi} = -1$, on a $2i\sin(z) = e^{-iz}(e^{2iz} - 1)$,
$2\cos(z) = e^{i(\pi-z)}(e^{2i(z-\frac{\pi}{2})} - 1)$, d'où on déduit que $\sin(z) = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 = e^0 \Leftrightarrow z = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow 2i(z - \frac{\pi}{2}) \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. ∎

On a aussi

2.2.12 DÉFINITION

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\} \tag{2.2}$$

$$\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \tag{2.3}$$

ces fonctions sont holomorphes dans leurs domaines de définition.

De la même façon on étend les fonction sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique à partir de leurs expressions réelles.

2.2.13 DÉFINITION

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \text{et } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{2.4}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2.2.14 PROPOSITION

i) sinh et cosh sont des fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$.
ii) $\sinh' = \cosh$ et $\cosh' = \sinh$
iii) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$
iv) $\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \sinh(w)\cosh(z)$ et
$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$.

2.2.15 Exercice Démontrer cette proposition.

2.2.16 Exercice Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, et que $|sin(x + iy)|^2 = sin^2(x) + sh^2(y)$.
En déduire que sin n'est pas bornée dans $\mathbb{C}$, et déterminer ses zéros (voir 2.2.10).

2.2.3 Détermination continue de l'argument et du logarithme

2.2.17 DÉFINITION

1) On appelle **argument** d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre réel t tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$.
2) On appelle **logarithme** d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre complexe $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$.

2.2.18 REMARQUE

1. Le nombre 0 n'a ni argument ni logarithme.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $w = a + ib$ est un logarithme de z, on aura $e^{a+ib} = z$, $|z| = e^a$ et $e^{ib} = \frac{z}{|z|}$. Ainsi, $a = \ln|z|$ et b est un argument de z et inversement si b est un argument de z, alors $w = \ln|z| + ib$ est un logarithme de z. On a donc montré que w est un logarithme de z si et seulement si $\frac{w-\ln|z|}{i}$ est un argument de z.
3. Le nombre complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ a pour argument les nombres réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et pour logarithme les nombres complexes $\ln(r) + i\theta + 2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.19 DÉFINITION

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^*$.

1. Une détermination de l'argument dans Ω est une fonction continue $\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$
$$e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}.$$
2. Une détermination du logarithme dans Ω est une fonction continue $l : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$
$$exp(l(z)) = z.$$

Ainsi l est une détermination du logarithme si et seulement si θ définie par $\theta(z) = \dfrac{l(z) - \ln|z|}{i}$ est une détermination de l'argument.

La proposition suivante dit que si on connait une détermination du logarithme dans Ω alors on les connaît toutes.

2.2.20 PROPOSITION

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $l : \Omega \to \mathbb{C}$ une détermination du logarithme.

Etant donné une fonction continue $\widetilde{l} : \Omega \to \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\widetilde{l}$ est une détermination du logarithme dans Ω.

ii) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{l} = l + 2ik\pi$.

Démonstration: $i) \Rightarrow ii)$ On a $exp(\widetilde{l}(z)) = exp(l(z))$, d'où $exp(\widetilde{l}(z) - l(z)) = 1$ pour tout $z \in \Omega$.

Ceci a pour conséquence que $\widetilde{l}(z) - l(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme la fonction $\frac{\widetilde{l}(z)-l(z)}{2i\pi}$ est continue dans Ω et à valeur dans $\mathbb{Z}$. L'image de Ω est un connexe de $\mathbb{Z}$, donc un singleton de $\mathbb{Z}$. D'où l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\widetilde{l}(z) - l(z) = 2ik\pi$ c-à-d la conditon 2. est satisfaite.
$ii) \Rightarrow i)$ evident

Les déterminations du logarithme sont caractérisées par leurs première dérivées.

2.2.22 **Proposition**
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}^*$ et $l : \Omega \to \mathbb{C}$ une donction continue.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. l est une déterminantion du logarithme dans Ω.
2. l est holomorphe, $l'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$ et il existe $a \in \Omega$ tel que $exp(l(a)) = a$

Démonstration: $i)$ Soit $z_0 \in \Omega$. On pose $w_0 = l(z_0)$ et $w = l(z)$ et en utilisant $exp(l(z)) = z$ et la continuité de l on obtient :
$$\lim_{z\to z_0} \frac{l(z)-l(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{l(z)-l(z_0)}{exp(l(z))-exp(l(z_0))} = \lim_{w\to w_0} \frac{w-w_0}{exp(w)-exp(w_0)} = \frac{1}{exp(w_0)} = \frac{1}{exp(l(z_0))} = \frac{1}{z_0}.$$ D'où $l'(z) = \frac{1}{z}$.

$ii)$ La fonction $g(z) = z.exp(-l(z))$ est holomorphe dans Ω et vérifie $g'(z) = exp(-l(z)) - zl'(z).exp(-l(z)) = exp(-l(z)) - exp(-l(z)) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. Comme Ω est connexe, g est constante par suite il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $g(z) = c$ pour tout $z \in \Omega$. Comme $exp(l(a)) = a$, $c = 1$ ce qui entraîne $exp(l(z)) = z$. ∎

2.2.24 **Exemple.** Montrer qu'il n'existe pas de déterminantion du logarithme dans $\mathbb{C}^*$.

2.2.4 La détermination principale de l'argument et du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

2.2.25 **Définition**
L'application $Arg : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to]-\pi, \pi[$ définie par

$$Arg(z) = \begin{cases} Arcos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{si } \mathrm{Im}(z) > 0 \\ 0 & \text{si } \mathrm{Im}(z) = 0 \\ -Arcos\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right) & \text{si } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

est une détermination de l'argument dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ appelée **détermination principale de l'argument**.

2.2.26 EXEMPLE. Vérifier que Arg est bien une détermination de l'argument i.e. qu'elle est continue et que pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $e^{iArg(z)} = \frac{z}{|z|}$.

On appelle **détermination principale du logarithme** dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ l'application

$$\begin{array}{rccc} \ln : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \ln|z| + iArg(z) \end{array} \tag{2.5}$$

2.2.27 REMARQUE

1. C'est une extension à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. de la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$.
2. Comme elle est holomorphe ses parties réelles et imaginaires, $\ln|z|$ et $Arg(z)$, sont des fonctions harmoniques de classe C^∞.
3. Les autres déterminations du logarithme dans la région $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, sont les fonction $\ln(z) + 2ik\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
4. Soit $z_0 \in \mathbb{R}_-$. Alors, $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ Imz > 0}} \ln(z) = \ln|z_0| + i\pi$ et $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ Imz < 0}} \ln(z) = \ln|z_0| - i\pi$

2.2.5 Fonctions puissances

2.2.28 DÉFINITION
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $z = e^w$ on dit que $e^{\alpha w}$ est une puissance α de z.
Ainsi, l'ensemble des déterminations de la puissance α de z est égal à
$\{e^{\alpha w + 2ik\pi\alpha}, k \in \mathbb{Z}\}$.

2.2.29 EXEMPLE. l'ensemble des puissances $\alpha = i$ de $z = i$ est $\{e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Dès qu'une fonction logarithme est disponible, on peut introduire les fonctions puissances.

2.2.30 DÉFINITION
Soit Ω un domaine et $l : \Omega \to \mathbb{C}$ une détermination du logarithme. La fonction

$$\begin{array}{rccc} g_\alpha : & \Omega & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & exp(\alpha(l(z))) \end{array} \tag{2.6}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, est appelée *détermination de la fonction puissance z^α* basée sur l.

2.2.31 PROPOSITION
Toute fonction puissance g_α est une fonction holomorphe dans Ω et vérifie

1. $g'_\alpha = \alpha g_{\alpha-1}$.
2. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $g_{\alpha+\beta} = g_\alpha g_\beta$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(z) = z^n$.

2.2.32 Exercice Soit ln la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
Montrer que dans ce cas, la détermination de z^α, on a : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,
$|z^\alpha| = |z|^{\operatorname{Re}\alpha} e^{-\arg(z)\operatorname{Im}\alpha}$ et $|z^\alpha| \leq |z|^{\operatorname{Re}\alpha} e^{\pi|\operatorname{Im}\alpha|}$.

Chapitre 3

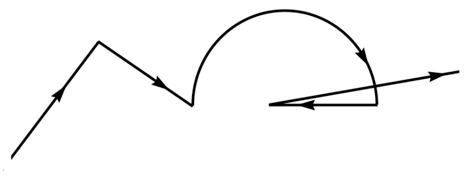
Intégration curviligne et applications aux fonctions holomorphes

3.1 Chemins et lacets

3.1.1 DÉFINITION

Un **chemin** ou courbe est, par définition, une application *continue* $\gamma : I \to \mathbb{C}$ d'un intervalle fermé et borné I de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) dans $\mathbb{C}$.

Le chemin est dit C^1 *par morceaux* si on peut subdiviser l'intervalle $I = [a, b]$ en un nombre fini de sous-intervalles $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ tel que $\gamma_i = \gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ soit de classe C^1 i.e. γ_i' est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, pour tout $0 \leq i \leq n-1$.
Le point $\gamma(a)$ (resp. $\gamma(b)$) est appelé l'origine (resp. l'extrémié) du chemin γ.
Un **lacet** est un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.
On dit qu'un chemin γ est contenu dans un sous-ensemble A de $\mathbb{C}$, son image $\gamma(I)$ est contenue dans A.



Dans toute la suite, sauf mention contraire, **tous les chemins seront supposés continus et C^1 par morceaux**.

On dit qu'un lacet γ est simple si $\gamma(t) \neq \gamma(t')$, pour tout $t, t' \in]a, b[$ tels que $t \neq t'$ i.e. $\gamma|_{]a,b[}$ est injective.

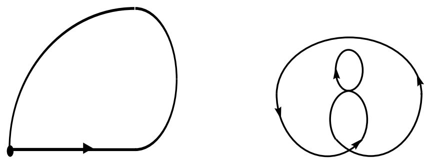


FIGURE 3.1 – lacet simple lacet non-simple

Le théorème de Jordan suivant, exprime une chose qui est intuitivement évidente mais, dont la démonstration est étonnament difficile.

3.1.2 THÉORÈME (DE JORDAN)
Le complémentaire $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$, d'un lacet simple γ, a deux composantes connexes, l'une bornée (appelée l'intérieur de la courbe) et l'autre n'est pas bornée (appelée l'extérieur de la courbe) .

Par convention, l'orientation positive de γ est telle que quand on se déplace le long du lacet la composante bornée est à gauche.

3.1.3 Exercice i) Si l'application γ est constante dans I, $\gamma(I)$ est réduit à un point de $\mathbb{C}$. On dit dans ce cas que c'est un *lacet constant*.

ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma_\alpha : I = [0,1] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) = e^{2i\pi\alpha t}$.
Alors $\gamma_\alpha(I) \subset C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.
Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^*$, $\gamma_n(I) = C$, mais, tout point du cercle est obtenu pour $|n|$ valeurs distinctes de t. On dit que le cercle unité est parcouru $|n|$ fois.

Cet exemple montre qu'il est essentiel de ne pas confondre un chemin γ et son image $\gamma^* = \gamma(I)$.

3.1.4 DÉFINITION
Un chemin $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ est un reparamétrage du chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, s'il existe deux subdivisions $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ et $\tilde{a} = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = \tilde{b}$, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, des difféomorphismes de classe C^1, $\phi_i : [t_i, t_{i+1}] \to [s_i, s_{i+1}]$ avec $\phi_i'(t) > 0$ et $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\phi(t))$.
Dans ce cas les chemins γ et $\tilde{\gamma}$ ont la même image et la même orientation.

On change l'orientation, du chemin γ, en utilisant des changements de paramétrisations ϕ_i telles que $\phi_i'(t) < 0$. Par exemple en prenant $\phi_i(t) = t_{i+1} + t_i - t$, dans ce cas on note $-\gamma$ le chemin obtenu. C'est le chemin γ parcouru en sens inverse.

Etant donnés deux chemins $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$. et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$. tels que l'origine $\gamma_2(c)$ de γ_2 soit l'extrémité de $\gamma_1(b)$ de γ_1. On appelle **juxtaposition** (ou joint) de γ_1 et γ_2, noté $\gamma_1 \vee \gamma_2$ (ou $\gamma_1 + \gamma_2$), le chemin $[a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ défini comme suit :

$$\gamma_1 \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{si } b \leq t \leq b+d-c. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.5 REMARQUE
Pour tout chemin γ, $\gamma \vee (-\gamma)$ est un lacet.

3.1.1 Intégrale le long d'un chemin

3.1.6 DÉFINITION
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 *par morceaux* tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$.

L'expression

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \tag{3.2}$$

est appelée l'intégrale de f le long du chemin γ.

3.1.7 PROPOSITION
Pour des fonctions continues f, g, des constantes c_1, c_2, et des chemins $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$:

i) $\int_\gamma (c_1 f + c_2 g)(z)\,dz = c_1 \int_\gamma f(z)\,dz + c_2 \int_\gamma g(z)\,dz$

ii) $\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

iii) $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

vi) Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un lacet constant, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

3.1.8 Exercice Démontrer cette proposition.

3.1.9 PROPOSITION
Si $\tilde{\gamma}$ est un reparamétrage de γ, alors

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

pour toute fonction continue f définie sur un ouvert contenant l'image de γ qui est aussi l'image de $\tilde{\gamma}$.

Démonstration: On peut, quitte à subdiviser $[a,b]$, supposer que γ est de classe C^1. Alors, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$. Comme $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, on a $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}(\phi(t)).\phi'(t)$. Soit $s = \phi(t)$ la nouvelle variable, alors $s = \tilde{a}$ losque $t = a$ et $s = \tilde{b}$ losque $t = b$ ainsi $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(\phi(t)))\tilde{\gamma}(\phi(t)).\phi'(t)\,dt$ ■

3.1.11 EXEMPLE. On veut évaluer $\int_\gamma x\,dz$, où γ est le segment d'origine $z = 0$ et d'extrémité $z = 1 + i$.

Dans ce cas, on peut choisir le paramétrage du chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, donnée par $\gamma(t) = t + it$ et la fonction f à intégrer est $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = x = \mathrm{Re}(z)$.

Alors, $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma x\,dz = \int_0^1 x\circ\gamma(t)\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \mathrm{Re}(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$
d'où $\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 t(1+i)\,dt = \frac{1+i}{2}$

3.1.12 EXEMPLE. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On note $C^+(z_0, r)$ le cercle de centre z_0 et de rayon r, orienté dans le sens positif. Une paramétrisation est donnée par $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, telle que $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

On va montrer : $\int_{C^+(z_0,r)} (z - z_0)^m\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } m = -1 \end{cases}$

En effet, $\gamma'(t) = ire^{it}$, et $\int_{C(z_0,R)^+} (z-z_0)^m\,dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t)-z_0)^m\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^m\,ire^{it}\,dt =$
$ir^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } m = -1 \end{cases}$

Notation : Soient z_1 et z_2 deux points de $\mathbb{C}$ on note par $[z_1, z_2]$ le segment d'origine z_1 et d'extrémité z_2 avec la paramétrisation $[z_1, z_2] = \{z_1 + t(z_2 - z_1) \mid t \in [0, 1]\}$.

Pour une fonction f continue sur $[z_1, z_2]$ on notera par $\int_{z_1}^{z_2} f(w)\,dw$ l'intégrale de f le long de du chemin $[z_1, z_2]$ i.e.

$$\int_{z_1}^{z_2} f(w)\,dw = (z_2 - z_1)\int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1))\,dt.$$

On rappelle que la longueur d'un chemin de classe C^1, $\gamma = x + iy : [a, b] \to \mathbb{C}$, est définie par

$$\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \tag{3.3}$$

Comme $dz = dx + idy$, on aura $|dz| = |\gamma'(t)|\,dt = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ et ainsi $\lambda(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |dz|$. Le résultat suivant donne un moyen pratique pour estimer les intégrales.

3.1.13 PROPOSITION
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un chemin.

On a

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \tag{3.4}$$

où la dernière expression est définie par $\int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|.|\gamma'(t)|\,dt.$

Soit $M \geq 0$ telle que $|f(z)| \leq M$ pour tout z dans l'image de γ, alors

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq M\lambda(\gamma) \tag{3.5}$$

Démonstration: Pour une fonction à valeurs complexes $g(t) = u(t) + iv(t)$ définie dans $[a,b]$, on a

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\, g(t)\,dt \tag{3.6}$$

car, $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$.
On va utiliser cette remarque pour montrer que

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt \tag{3.7}$$

Posons $\int_a^b g(t)\,dt = re^{i\theta}$ où $r \geq 0$ et θ sont deux réels fixés.
Alors,

$$r = \mathrm{Re}(r) = \mathrm{Re}\int_a^b e^{-i\theta} g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} g(t))\,dt \tag{3.8}$$

D'autre part, $\mathrm{Re}(e^{-i\theta}g(t)) \leq |e^{-i\theta}g(t)| = |g(t)|$, d'où $\int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta}g(t))\,dt \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$ et par suite $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = r \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$, par conséquent $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|$ Si $|f(\gamma(t))| \leq M$,
alors $\int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M\lambda(\gamma)$. ■

3.1.2 Domaine et Primitives

3.1.15 DÉFINITION
On appelle **domaine de** $\mathbb{C}$ un ouvert connexe.

3.1.16 LEMME
Soit Ω un domaine.

Alors pour tout $z, z' \in \Omega$ il existe un chemin de classe C^1 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ tel que $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = z'$. En particulier, tout domaine est connexe par arcs.

Démonstration: Soit $a \in \Omega$. On pose $A = \{z \in \Omega \mid$ il existe un arc de classe C^1 dans Ω qui relie a à z $\}$

A est ouvert : soit $z \in A$, il existe un arc C^1, γ_z qui relie a à z et comme Ω est ouvert il existe $\delta_z > 0$ tel que $D(z,\delta_z) \subset \Omega$. Alors tout point $z' \in D(z,\delta_z)$ est relie à a par un chemin de classe C^1 obtenu à partir de la juxtaposition du chemin γ_z et du segment $[z,z']$. D'où $D(z,\delta_z) \subset \Omega$.

A est fermé : En effet, si $z \notin A$, alors $D(z,\delta_z) \cap A = \emptyset$, sinon il existe un $z' \in D(z,\delta_z) \cap A$, et un chemin C^1 de a à z', $\gamma_{z'}$, on obtiendrait ainsi un chemin C^1 de a à z à partir de la juxtaposition du chemin $\gamma_{z'}$ et du segment $[z,z']$, ce qui entraînerait que $z \in A$. Ainsi si $z \notin A$, alors $D(z,\delta_z) \subset \Omega \setminus A$, donc $\Omega \setminus A$ et par suite A est fermé.

Comme A est ouvert et fermé non vide du connexe Ω alors $A = \Omega$. ■

3.1.18 DÉFINITION
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
Une **primitive de** f dans Ω est une fonction holomorphe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$.

3.1.19 REMARQUE
Une primitive d'une fonction continue dans un ouvert est une fonction holomorphe dont la dérivée f' est continue i.e. est C^1 au sens complexe.

3.1.20 THÉORÈME
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) f admet une primitive dans Ω.

ii) Il existe une fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to \Omega$,

$$\int_\gamma f\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

iii) L'intégrale le long de tout lacet est nulle : i.e. si γ est un lacet de Ω, alors

$$\int_\gamma f\, dz = 0 \tag{3.9}$$

iv) L'intégrale ne dépend pas du chemins i.e. si z_0 et z_1 sont deux points de Ω et γ_0 et γ_1 sont deux chemins de Ω reliant z_0 à z_1, alors

$$\int_{\gamma_0} f\, dz = \int_{\gamma_1} f\, dz \tag{3.10}$$

Démonstration: .

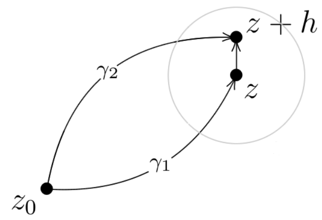
$i) \Rightarrow ii)$ Soit $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un chemin C^1 et $F : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$, alors $h(t) = F(\gamma(t))$ est de classe C^1 et $h'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, d'où $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = h(b) - h(a) = \int_a^b h'(t)\, dt = \int_\gamma f'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f\, dz$.

$ii) \Rightarrow iii)$ trivial

$iii) \Rightarrow iv)$ Soient $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \Omega$ deux chemins tels que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.
On définit $\gamma = \gamma_0 \vee (-\gamma_1) : [0, 2] \to \Omega$ est un lacet

$$\int_{\gamma_0} f\, dz = \int_{\gamma_0} F'(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma_1} F'(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f\, dz \tag{3.11}$$

iv) $\Rightarrow$ *i*) On va définir au moyen de l'intégrale une primitive de f. On fixe un point z_0 de Ω. Soit z un autre point de Ω. Comme Ω est un domaine, il existe un chemin γ_1 dans Ω reliant z_0 à z. On pose $F(z) = \int_{\gamma_1} f(\xi)\, d\xi$. On obtient ainsi une fonction F dans Ω, car d'après l'hypothèse *iv*), la valeur $F(z)$ ne dépend que de z et pas du chemin choisi. On dit que F est **bien définie**. Il reste à montrer que F est dérivable et que $F' = f$. Comme Ω est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que le disque $D(z;\delta) \subset \Omega$. $|h| < \delta$.



Soit $h \in \mathbb{C}$, tel que $z+h \in D(z;\delta)$, le chemin (segment) $\rho(t) = z + th$, $0 \leq t \leq 1$ est contenu dans $D(z;\delta)$. on pose $\gamma_2 = \gamma_1 \vee \rho$. Alors :

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_2} f(\xi)\, d\xi - \int_{\gamma_1} f(\xi)\, d\xi = \int_{\rho} f(\xi)\, d\xi = h \int_0^1 f(z+th)\, dt \tag{3.12}$$

D'où, comme f est continue,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th)\, dt \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)\, dt = f(z) \tag{3.13}$$

le passage à la limite est justifié par le théorème de convergence dominée (ou bien la continuité f et la compacité de $[0,1]$).

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$, par suite F est dérivable et $F' = f$, comme souhaité. ∎

3.1.22 EXEMPLE. **1)** Soit γ le cercle de rayon $r > 0$ et de centre $a \in \mathbb{C}$ orienté positivement. Calculer $\int_\gamma (z-a)^n\, dz$ pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Solution : Premièrement si $n \geq 0$ alors, $(z-a)^n = \frac{1}{n+1}((z-a)^{n+1})'$ est la dérivée d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, d'après le théorème précédent $\int_\gamma (z-a)^n\, dz = 0$ Secondo, pour $n \leq -2$, on a aussi $(z-a)^n = \frac{1}{n+1}((z-a)^{n+1})'$ qui est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comme γ est un lacet du domaine Ω, on a $\int_\gamma (z-a)^n\, dz = 0$ Finalement, si $n = -1$. On va calculer directement. On paramètre γ par $\gamma(t) = re^{it} + a$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors $\gamma'(t) = ire^{it}$, d'où

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{it}+a) - a} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2i\pi.$$

En résumé :

$$\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1, \\ 2i\pi & \text{si } n = -1. \end{cases} \tag{3.14}$$

2) Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ telle que $f'(z) = \frac{1}{z}$.
Solution : Si une telle fonction existe, alors $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$ si γ est le cercle unité. Mais, d'après le cacul précédent $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi \neq 0$.

3.1.23 Remarque
Il s'en suit, qu'il n'existe pas de détermination du logarithme dans le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.1.24 Proposition
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Alors $f'(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$ si et seulement si f est constante dans Ω.

Démonstration: Soit z, z' deux points de Ω. Comme, Ω est un ouvert connexe, il existe un arc C^1, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(0) = z$ et $\gamma(1) = x'$. D'autre part f est une primitive de sa dérivée f', le théorème précédent entraîne : $f(z') - f(z) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_\gamma f'(w)\,dw = 0$ i.e. $f(z') = f(z)$, comme ces points sont arbitraires, f est constante.

3.1.26 Corollaire
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $F_1 = F_2 + c$.

Démonstration: $F_1' = F_2' = f$, par suite $F_1' - F_2' = 0$ dans Ω, d'où $F_1 = F_2 + constante$. ■

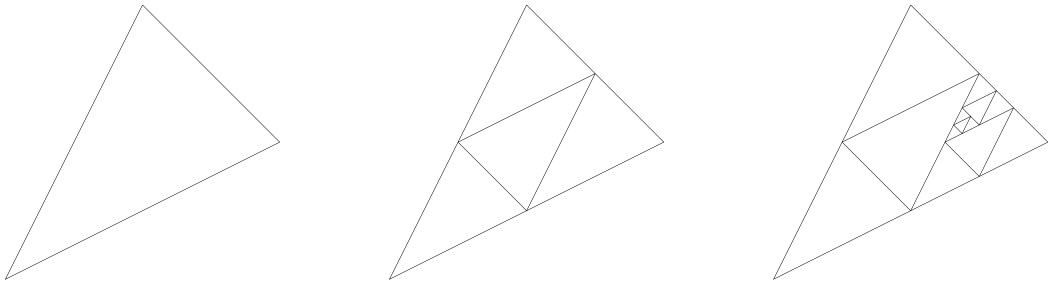
3.2 Résultats locaux et conséquences

3.2.1 Théorème (de Goursat)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Alors pour tout triangle plein $\Delta \subset \Omega$, de bord T on a $\int_T f(z)\,dz = 0$.

Démonstration: Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et Δ_0 un triangle plein de Ω de bord T_0.
On note par d_0 le diamètre de Δ_0 et P_0 sont périmètre (la longueur de T_0.)
On divisant par le milieu chaque côté de T_0, on construit 4 triangles (semblables), Δ_0^1, Δ_0^2, Δ_0^3 et Δ_0^4 de bords respectivement T_0^1, T_0^2, T_0^3 et T_0^4 tels que :

$$\int_{T_0} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{T_0^i} f(z)\,dz.$$

Il existe alors un triangle $\Delta_1 \in \{\Delta_0^i \,|\, 1 \leq i \leq 4\}$ tel que son diamètre $d_1 = \frac{d_0}{2}$, son périmètre $P_1 = \frac{P_0}{2}$ et $\frac{1}{4}\left|\int_{T_0} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{T_1} f(z)\,dz\right|$.



En itérant le processus on construit une suite de triangles pleins $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$ tels que $\frac{1}{4^n}\left|\int_{T_0} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{T_n} f(z)\,dz\right|$. Puisque le diamètre de Δ_n, $d_n = \frac{d_0}{2^n}$ tends vers 0, lorsque $n \to +\infty$, on voit que $\cap_{n\geq 0}\Delta_n$ est réduit à un singleton $\{a\} \subset \Delta_0$. Par hypothèse f est dérivable au sens complexe en a, i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $D(a,\delta) \subset \Delta$, et pour $|z-a| \leq \delta$ on a

$$|f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)| \leq \epsilon|z-a|$$

Pour n assez grand, tel que $d_n < \delta$, on a $\Delta_n \subset D(a,\delta)$, par suite pour tout $z \in \Delta_n$ on aura $|f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)| \leq \epsilon d_n$ et donc $\left|\int_{T_n} f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\,dz\right| \leq \epsilon d_n P_n$.

D'autre part, l'application $z \mapsto f(a) + f'(a)(z-a)$ admet une primitive, à savoir l'application $z \mapsto f(a)z + f'(a)\frac{(z-a)^2}{2}$, d'où $\int_{T_n} f(a) + f'(a)(z-a)\,dz = 0$, on déduit que $\left|\int_{T_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{T_n} f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)\,dz\right| \leq \epsilon d_n P_n$.

Ainsi, $\left|\int_{T_0} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{T_n} f(z)\,dz\right| \leq \epsilon 4^n d_n P_n = \epsilon d_0 P_0$. D'où $\left|\int_{T_0} f(z)\,dz\right| = 0$. ■

La généralisation suivante du Théorème de Goursat nous sera très utile par la suite.

3.2.3 Corollaire

Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\}) \cap C(\Omega)$.

Alors pour tout triangle plein $\Delta \subset \Omega$, de bord T, on a $\int_T f(z)\,dz = 0$.

Démonstration: Soit Δ un triangle plein contenu dans Ω, on considère les cas suivants :

1. si $a \notin \Delta$ alors $\int_T f(z)\,dz = 0$, d'après le théorème de Goursat puisque f est holomorphe sur l'ouvert $\Omega \setminus \{a\}$ et $\Delta \subset \Omega \setminus \{a\}$.
2. Si $a \in \Delta$, quitte à diviser Δ en deux triangles ou trois triangles (suivant que le point est sur le bord ou à l'intérieur de Δ) , on peut se ramener au cas où a est un sommet.

   Maintenant, pour tout $\epsilon > 0$, on prend un triangle T_ϵ de sommet a et de périmètre ϵ, tel que $\int_T f(z)\,dz = \int_{T_\epsilon} f(z)\,dz$ par suite $\left|\int_T f(z)\,dz\right| = \left|\int_{T_\epsilon} f(z)\,dz\right| \leq \epsilon \|f|\Delta\|_\infty$. D'où $\int_T f(z)\,dz = 0$.

3.2.5 Définition

Un domaine étoilé Ω de centre $a \in \Omega$ est un ouvert tel que si pour tout $z \in \Omega$, le segment $[a, z] := \{\xi \in \mathbb{C}; \xi = a + t(z-a),\ 0 \leq t \leq 1\}$ est contenu dans Ω.

Exemples : $\mathbb{C}$, un disque, un demi-plan, $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}.\mathbb{R}_+$, une bande $B = \{z \in \mathbb{C}; a < \operatorname{Im}(z) < b\}$, sont des domaines étoilés.

3.2.6 Théorème (Théorème de Cauchy-Goursat (pour un domaine étoilé))

Soit Ω un domaine étoilé de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\}) \cap C(\Omega)$.
Alors f admet une primitive dans D.
Par conséquent, pour tout lacet γ contenu dans Ω, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Démonstration: Soit a un centre du domaine étoilé Ω. On définit une fonction F sur Ω, en posant pour tout $z \in \Omega$: $F(z) := \int_a^z f(w)\, dw$, l'intégrale le long du segment qui relie a à z.
On va montrer que F est une primitive de f i.e. $F' = f$.
Soit $z \in \Omega$ et soit $\delta > 0$ tel que $D(z, \delta) \subset \Omega$. Alors pour $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $|h| < \delta$, le triangle (plein) de sommets a, z et $z+h$ est contenu dans Ω, d'après le théorème de Goursat (généralisé),

$$0 = \int_T f(z)\, dz = \int_a^z f(w)\, dw + \int_z^{z+h} f(w)\, dw + \int_{z+h}^a f(w)\, dw.$$

Ainsi

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{z+h} f(w)\, dw - \int_a^{z+h} f(w)\, dw\right) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\, dw$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)h\, dt = \int_0^1 f(z+th)\, dt.$$

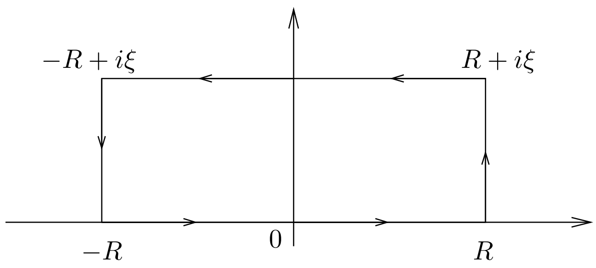
D'où, $F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)\, dt = f(z)$, le passage à la limite est justifié par le théorème de convergence dominée (ou bien la continuité f et la compacité de $[0, 1]$). ■

3.2.8 Définition

Une **fonction entière** est une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

3.2.9 Corollaire

Toute fonction entière admet une primitive.



3.2.10 EXEMPLE. On va utiliser ce résultat pour donner une nouvelle démonstration du fait que la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier.

La fonction de la variable complexe, $f(z) = e^{-\pi z^2}$ est une fonction entière, son intégrale le long de tout lacet est alors nulle. Soit $\xi > 0$ et $R > 0$, on note par γ_R le rectangle de sommets $-R$, R, $R + i\xi$ et $-R + i\xi$, orienté dans le sens positif.

D'après le théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

D'autre part $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{R}^{R+i\xi} f(z)\,dz + \int_{R+i\xi}^{-R+\xi} f(z)\,dz + \int_{-R+i\xi}^{-R} f(z)\,dz.$ $(*)$

O na :

1) $\displaystyle\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\,dx$, alors $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1$

2) $\displaystyle\int_{R}^{R+i\xi} f(z)\,dz = \int_0^{\xi} f(R+iy)\,dy = \int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2+2iRy-y^2)}\,dy$ et

$\displaystyle\left|\int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2+2iRy-y^2)}\,dy\right| \leq Ce^{-\pi R^2}$. D'où $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{R}^{R+i\xi} f(z)\,dz = 0$ car

3) De même pour l'intégrale le long de l'autre côté vertical, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R+i\xi}^{-R} f(z)\,dz = 0$

4) $\displaystyle\int_{R+i\xi}^{-R+\xi} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}\,dx = -e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$

alors $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{R+i\xi}^{-R+\xi} f(z)\,dz = -e^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$

Finalement, lorsque R tends vers $+\infty$ dans $(*)$ on obtient : pour $\xi > 0$

$$0 = 1 - e^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

i.e. $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.

Pour $\xi = 0$ on a $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1 = f(0)$, et pour $\xi < 0$ en utilise la parité. Ainsi pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.

3.2.11 THÉORÈME (FORMULE DE CAUCHY POUR UN DISQUE)
Soit Ω un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Soit $D = D(a,r)$ un disque tel que $\overline{D} \subset \Omega$. Alors pour tout $z \in D$ on a la formule de Cauchy suivante :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Démonstration: Soit $z \in D$ fixé. On considère la fonction$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z, \\ f'(z) & \text{si } w = z. \end{cases}$

Alors, g est holomorphe dans Ω sauf peut être en z, ou elle est continue,et en appliquant le Théorème de Cauchy-Goursat, on obtient $\int_{C(a,r)} g(z)\, dz = 0$.

Par conséquent

$$0 = \int_{C(a,r)} g(w)\, dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, dw = \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{w-z}\, dw \tag{3.15}$$

d'où

$$\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = f(z) \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} \tag{3.16}$$

Il reste à montrer que $\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z}\, dw = 2i\pi$.

On prend la paramétrisation du cercle $C(a,r)$, $w = a + re^{is}$ $s \in [0, 2\pi]$ alors $\displaystyle\int_{C(a,r)} \frac{1}{w-z}\, dw = \int_0^{2\pi} \frac{ire^i s}{re^{is} - (z-a)}\, ds = i \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{re^{is}}\right)}\, ds.$

Comme pour tout $s \in [0, 2\pi]$, $\left|\frac{z-a}{re^{is}}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$ on a $\displaystyle\frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{re^{is}}\right)} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-a}{re^{is}}\right)^n$ et la convergence normale entraîne et le calcul 3.1.12 :

$$i \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{re^{is}}\right)}\, ds = i \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z-a}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} e^{-ins}\, ds = 2i\pi.$$ ■

Comme conséquence on a :

3.2.13 COROLLAIRE
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Soit $D = D(a,r)$ un disque tel que $\overline{D} \subset \Omega$. Alors

$$\int_{C(a,r)} f(w)\, dw = 0.$$

Démonstration: On fixe z dans D et on applique la formule de Cauchy à la fonction $w \mapsto f(w)(w-z)$. ■

On va montrer maintenant qu'une fonction holomorphe est en fait analytique (on sait déjà que la réciproque est vraie) ainsi holomorphe est équivalent à C^∞ au sens complexe. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \Omega$, on désigne par $\delta(a)$ la distance de a au complémentaire de Ω.

On remarquera que $\delta(a) = \sup\{r > 0 \,|\, D(a,r) \subset \Omega\}$.

3.2.15 THÉORÈME

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique sur Ω.

Plus précisément, pour tout $a \in \Omega$, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ pour tout $z \in D(a, \delta(a))$ et pour tout $n \geq 0$ et $0 < r < \delta(a)$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$$

Démonstration: Soit $0 < r < r_0 < \delta(a)$, d'après la formule de Cauchy, pour $z \in D(a,r)$, on a $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$.

Comme $|w-a| = r$ alors $|(z-a)/(w-a)| < 1$, on peut écrire, $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$

La convergence normale sur le compact $C(a,r)$ permet d'intervertir le signe somme et le signe intégration, on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right) (z-a)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Ainsi pour tout $n \geq 0$ et $0 < r < \delta(a)$, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw.$ ■

3.2.17 REMARQUE

En particulier, toute fonction holomorphe est en fait de classe C^∞ au sens complexe.

3.2.18 COROLLAIRE

1. Il y a identité entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques.
2. Il y a identité entre fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ et séries entières de rayon de convergence ∞.

3.2.19 COROLLAIRE (LES INÉGALITÉS DE CAUCHY)
Si f est une fonction analytique sur un ouvert Ω. Alors, pour tout $a \in \Omega$ et $0 < r \leq \delta(a)$ on a :

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n! \|f|_{C(a,r)}\|_\infty}{r^n}.$$

pour tout $n \geq 0$.

Démonstration: on a

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right| = \left| \frac{n!}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}} ie^{it} dt \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\|f|_{C(a,r)}\|_\infty}{r^n} dt$$

Par passage à la limite on obtient l'inégalité pour $r = \delta(a)$. ∎

Comme pour $a \in \Omega = \mathbb{C}$, $\delta(a) = +\infty$, si f est une fonction entière alors f est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, et donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$. Ainsi, il y a identité entre fonctions entières et les sommes des séries entières de rayon de convergence infini.

3.2.21 COROLLAIRE (THÉORÈME DE LIOUVILLE)
Une fonction entière et bornée est constante

Démonstration: Soit $M > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq M$. D'après l'inégalité de Cauchy pour $n = 1$, on a pour $a \in \mathbb{C}$, on a $|f'(a)| \leq \frac{M}{r}$ pour tout $0 < r < \delta(a) = +\infty$ et par passage à la limite lorsque $r \to +\infty$ on aura $f'(a) = 0$. Ainsi $f' \equiv 0$ et par connexité de $\mathbb{C}$, f est constante. ∎

3.2.23 COROLLAIRE (THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS)
$\mathbb{C}$ est algébriquement clos i.e. si $P \in \mathbb{C}[Z]$ est un polynôme de degré $n \geq 1$, alors il existe des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, c des entiers positifs $m_1, \ldots, m_k$ tels que $m_1 + \ldots + m_k = n$ et
$$P(z) = c \prod_{i=1}^{k} (z - \alpha_i)^{m_i}.$$

Démonstration: Soit $P \in \mathbb{C}[Z]$, tel que $\deg(P) \geq 1$, si P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$ alors $f = \frac{1}{P}$ est une fonction entière. De plus $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$, donc elle est bornée sur $\mathbb{C}$, on déduit du théorème de Liouville que f est constante égale à la fonction identiquement nulle. Ce qui est absurde puisque $f = \frac{1}{P}$. Ceci montre que P a au moins un zéro dans $\mathbb{C}$. ∎

3.2.25 THÉORÈME (THÉORÈME DE MORERA)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que pour tout lacet γ contenu dans Ω on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.
Alors, f est holomorphe sur Ω.

Démonstration: D'après 3.1.20, la condition entraîne l'existence d'une primitive F de f. Comme F est une primitive elle est holomorphe, par suite sa dérivée f est aussi holomorphe.

3.3 Le théorème des zéros isolés

3.3.1 THÉORÈME
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $a \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$, alors f est identiquement nulle.

Démonstration: Posons $G = \{z \in \Omega; f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \geq 0\}$.

$\underline{G \text{ est un fermé de } \Omega}$: En effet, comme les $f^{(n)}$ sont des fonctions continues, alors $G = \cap_{n\geq 0}(f^{(n)})^{-1}(0)$ est fermé dans Ω comme intersection de fermés de Ω,

$\underline{G \text{ est un ouvert de } \Omega}$ En effet, si $z_0 \in G$, alors f est identiquement nulle sur le disque $D(z_0; \delta_{z_0})$, donc ce dernier est contenu dans Ω.

Donc G est ouvert et fermé dans Ω, par hypothèse $a \in G$ ce qui montre que G n'est pas vide. Alors $G = \Omega$ d'après la connexité de Ω et ainsi f est identiquement nulle sur Ω.

3.3.3 COROLLAIRE
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés i.e. $Z(f) = \{z \in \Omega \,|\, f(z) = 0\}$ est un ensemble discret de Ω.

Démonstration: Soit $z_0 \in \Omega$ un zéro de f i.e. $f(z_0) = 0$. comme f n'est pas identiquement nulle d'après le théorème 3.3.1, il existe $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, et $f^{(k)}(z_0) = 0, 0 \leq k \leq m-1$, de sorte que le développement en série de Taylor de f dans le disque $D(z_0; d_{z_0})$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq m} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m\left[1 + c(z-z_0) + \cdots\right] = (z-a)^m g(z)$$

■

avec $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. D'où, il existe $0 < r < d_{z_0}$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, on obtient ainsi un voisinage de z_0 dans lequel il n'y a pas d'autres zéros de f.

3.3.5 COROLLAIRE (MULTIPLICITÉ D'UN ZÉRO)
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Alors chaque zéro $a \in Z(f)$ possède une multiplicité $m \geq 1$, définie par les conditions :

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{si} \quad k \leq m-1 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

C'est aussi l'unique entier $m \geq 1$ tel que $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ soit holomorphe sur Ω et $g(a) \neq 0$.

3.3.6 COROLLAIRE (UNICITÉ DU PROLONGEMENT ANALYTIQUE THÉORÈME DE L'IDENTITÉ)
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes dans Ω et $a \in \Omega$.

On suppose qu'il existe une suite $\{z_n\}$ dans $\Omega \setminus \{a\}$ qui converge vers a et telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout $n \geq 0$. Alors $f = g$.

(en d'autres termes, si deux fonctions holomorphes sur un domaine, coïncident sur un ensemble non-discret et non-vide, elles sont égales)

Démonstration: La fonction $h = f - g$ admet les z_n et le point a pour zéros. Comme la suite $\{z_n\}$ est différente de a et converge vers a, le zéro a est donc non isolé d'où $h \equiv 0$. ∎

3.3.8 EXEMPLE. La fonction $f(z) = \ln(1+z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq -1\}$, et la somme de série entière $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ converge dans le disque unité $D(0,1)$ donc est holomorphe sur ce disque. Comme pour $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, donc $f(x) = g(x)$. Alors $f(z) = g(z)$ sur $D(0,1)$, car $]-1,1[$, n'est pas discret et $D(0,1) \subset \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq -1\}$. Par conséquent on a le développement en série : sur $D(0,1)$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

3.3.9 Exercice Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Monter que pour $|z| < 1$ on a

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n.$$